

ИЗМЕНЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СКЛОНА ГОРЫ С УСТУПОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ С УБЫВАЮЩЕЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ЭПЮРОЙ

CHANGES IN THE STRESS STATE OF A MOUNTAIN SLOPE WITH A LEDGE UNDER THE ACTION OF AN EXTERNAL LOAD WITH A DECREASING TRIANGULAR EPUR



Ж. А. Баялиева,
Кыргызский Национальный аграрный университет им. К. И. Скрябина, г. Бишкек
ms.jamila62@mail.ru

Zh. Bayalievna,
Kyrgyz National Agrarian University named after K.I. Skryabin, Bishkek



Б. Жумабаев,
Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина, г. Бишкек
ms.jamila62@mail.ru

B. Zhumabaev,
Kyrgyz-Russian Slavik University named after B. Yeltsin, Bishkek

Кыргызская Республика занимает площадь 198,5 тыс. км². Горы и горные склоны составляют более 94 % территории страны. По этой причине для ведения разных видов хозяйственной деятельности в горных районах используются горные склоны, имеющие уступы на различной высоте склона горы, от 100 м до 4...5 км. *Объектом исследования* являются уступы склона горы, которые необходимы для ведения хозяйственной деятельности, расположенные на различной высоте склона. *Предмет исследования* – начальное и измененное напряженно-деформированное состояние массива вблизи уступа склона горы от действия гравитационных и тектонических сил. *Целью исследования* является создание математической модели и расчета напряженно-деформированного состояния массива вблизи уступов склона горы для проверки граничных условий с нагрузкой убывающей треугольной эпюрой. *Задача исследования* – установить законы распределения напряжений в каждой точке массива с помощью решения дифференциального уравнения равновесия с использованием методики Колосова-Мухелишвили. Уступы образованы природой или созданы человеком, т. е. техногенные, которые со склоном горы сопрягаются под различным углом наклона на различной высоте склона. Для оценки устойчивости и безопасности от оползневых процессов сооружений, расположенных в зоне уступа, возникает необходимость, внимательного изучения напряженно-деформированного состояния массивов. Для изучения напряженного состояния горного массива использовались основные методы: разгрузки, конечных элементов, конечных разностей, а также аналитические методы Колосова-Мухелишвили в том варианте, где применялось конформное отображение. Таким образом, для изучения состояния массивов в зоне уступов склона горы необходимо создать аналитическую модель напряженно-деформированного состояния массивов уступов склона горы, в которых зоны сопряжения уступа и склона горы, возможные высоты расположения уступа, действие объемных и поверхностных нагрузок учитывались бы в единой аналитической модели. В данном случае рассмотрена задача, когда напряженное состояние массива горы с симметричным уступом находится в естественных условиях, которое формируется при совместном действии гравитационных, горизонтальных тектонических сил и внешних распределенных нагрузок с треугольной эпюрой. Задача решена с использованием методики Колосова-Мухелишвили и программы среды MATHCAD [6]. В результате расчетов путем математического моделирования установлены закономерности распределения напряжений в массивах склона горы с уступом, где учитывались действия гравитационных, горизонтальных тектонических сил в отдельности. Для проверки граничных условий с нагрузкой убывающей треугольной эпюрой выполнен расчет напряжений для контурных точек в окрестности нагруженного участка контура. Закономерности распределения начального напряженного состояния массива склона с уступами представлены для каждого компонента напряжений в виде изолиний напряжений

Ключевые слова: оценка устойчивости, деформация, напряженное состояние, метод Колосова-Мухелишвили, конформное отображение, уступы склона горы, горизонтальное тектоническое сжатие, убывающая эпюра нагрузки, изолинии, закономерность распределения напряжения

The Kyrgyz Republic covers an area of – 198,5 thousand km². Mountains and mountain slopes occupy more than 94 % of the country. For this reason, in mountainous areas, mountain slopes are used for conducting various types of human economic activity ledges at different heights of the mountain slope, from hundreds of meters to 4–5 km. *The object of the study* is the ledges of the mountain slope, which are necessary for economic activity, located at different heights of the slope. *The subject of the study* is the initial and changed stress-strain state of the massif near the scarp of the mountain slope from the action of gravitational and tectonic forces. *The aim of the study* is to create a mathematical model and calculate the stress-strain state of the massif near the scarps of the mountainside to check the boundary conditions with the load of a decreasing triangular epure. *The objective of the study* is to establish the laws of stress distribution in each point of the massif by solving the differential equation of equilibrium using the Kolosov-Muskhelishvili method. Ledges are formed either by nature or created by man, technogenically, and are mated with the mountain slope at a different angle of inclination at different heights of the slope. To assess the stability and safety from landslide processes of structures located in the ledge zone, it becomes necessary to carefully study the stress-strain state of the massifs. To study the stress state of a rock mass, the following main methods have been used: the unloading method, the finite element method, the finite difference method, as well as the analytical methods of Kolosov-Muskhelishvili in the version where the conformal mapping is used [Gulnara]. Thus, to study the state of massifs in the zone of ledges of the mountain slope, it is necessary to create an analytical model of the stress-strain state of massifs of ledges of the mountain slope, in which the zones of conjugation of the ledge and the mountain slope, the possible heights of the ledge, the effect of volumetric and surface loads would be taken into account in a single analytical model. In this case, the authors consider the problem when the stress state of a mountain massif with a symmetrical scarp in natural conditions, which is formed under the combined action of gravitational, horizontal tectonic forces and external distributed loads with a triangular epure. The problem is solved using the Kolosov-Muskhelishvili method and the MATNCAD software environment. As a result of the calculations, the patterns of stress distribution in the massifs of the mountain slope with a ledge have been created, where the actions of gravitational, horizontal tectonic forces were taken into account each separately. To check the boundary conditions with a load with a decreasing triangular diagram, the stresses are calculated for the contour points in the vicinity of the loaded section of the contour. The patterns of distribution of the initial stress state of the slope mass with ledges are presented for each stress component in the form of stress isolines

Key words: stability assessment, deformation, stress state, Kolosov-Muskhelishvili method, conformal mapping, mountain slope ledges, horizontal tectonic compression, decreasing load diagram, isolines, regularity of stress distribution

Введение. Результаты начального и измененного напряженного состояния уступов склона горы с помощью компьютерного моделирования обеспечивают социальный положительный эффект по сравнению с проведением необходимых измерений напряжений методом «разгрузки». Влияние рельефа на напряженное состояние массива в рамках рассматриваемого метода рассматривалось в работах [1; 4; 5]. Действие равномерно распределенной нагрузки на напряженное состояние массивов склонов гор с уступами исследовано в последние годы в ранних работах автора¹. Далее, используя известную методику, рассматривается задача о влиянии внешней нагрузки с линейно убывающей треугольной нагрузкой на

напряженное состояние склона горы с одним уступом.

Объектом исследования являются уступы склона горы, которые необходимы для ведения хозяйственной деятельности, расположенные на различной высоте склона.

Предмет исследования – начальное и измененное напряженно-деформированное состояние массива вблизи уступа склона горы от действия гравитационных и тектонических сил.

Целью исследования является создание математической модели и расчета напряженно-деформированного состояния массива вблизи уступов склона горы для проверки граничных условий с нагрузкой убывающей треугольной эпюрой.

¹ Баялиева Ж. А., Жумабаев Б. Ж. Напряженное состояние склона горы с уступом при действии внешней нагрузки с линейно-возрастающей треугольной эпюрой // Известия Тульского государственного университета. – 2021. – Вып. 1. – С. 111–122; Жумабаев Б., Баялиева Ж. А., Исмаилова К. Д. Напряженное состояние у оснований дорог, расположенных в склоне гор // Современные проблемы механики сплошных сред: сб. тр. междунар. конф. – 2011. – Вып. 13. – С.300–309; Жумабаев Б., Баялиева Ж. А. Напряженное состояние склона с уступами от действия распределенной на уступах нагрузки // Вестник КазНУ. – Алматы: Казахский нац. техн. ун-т им. К. И. Сатпаева, 2014. – С.142–159; Жумабаев Б. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом. – Фрунзе: Илим, 1988. – 190 с.

Задача исследования: установить законы распределения напряжений в каждой точке массива с помощью решения дифференциального уравнения равновесия с использованием методики Колосова-Мухелишвили.

Методы исследования: использование программного комплекса MATHCAD для конформных отображений; метод Колосова-Мухелишвили; численный анализ и машинная графика на ПЭВМ.

Разработанность темы. Массивы склона горы с уступом испытывают в естественных условиях совместное действие силы гравитации и горизонтального тектонического сжатия и находятся в условиях плоской деформации. Сила гравитации определяется объёмным весом горных пород $\gamma = \rho g$. Тектоническая сила T_x направлена горизонтально и имеет постоянную интенсивность по глубине массива горы с уступом. В плоскости XOY рельеф склона с симметричными уступами моделируется с помощью отображающей функции

$$\begin{aligned} \omega(\xi, \eta) &= \alpha \zeta(\xi, \eta) + \omega_0(\xi, \eta); \\ \omega p_1(\xi, \eta) &= \omega_0 p_1(\xi, \eta) + \alpha; \\ \omega_0(\xi, \eta) &= a_1 / \zeta(\xi, \eta) - i + b_1 / \zeta(\xi, \eta) + tb - i; \\ \omega_0 p_1(\xi, \eta) &= a_1 / (\zeta(\xi, \eta) - i)^2 - b_1 / (\zeta(\xi, \eta) + tb - i)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

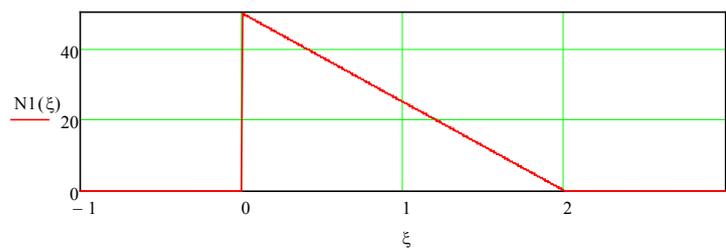


Рис. 1. Эпюра распределенной нагрузки для иллюстрации условно присвоено $L_3=0, L_4=2$ /
Fig. 1. Distributed load diagram, for illustration conditionally assigned $L_3=0, L_4=2$

Принято обозначить область действия нагрузки:

L_3 и L_4 – соответственно начало и конец участка контура, где эпюра нагрузки убывает;

P_0 – максимально большое значение нагрузки (рис. 1).

Согласно принятой в работах² [8] двумерной теории, упругости в произвольной точке массива для напряжений обозначают через $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$. Эти компоненты в той же точке массива в преобразованной системе координат (1) обозначены через $(\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta})$.

Имеют место связи между компонентами в декартовой и криволинейных координатах в виде³:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= \sigma_x + \sigma_y; \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} &= e^{2i\alpha} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}), \end{aligned} \tag{2}$$

где $e^{2i\alpha} = \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}$. (3)

Компоненты напряжений определяются через функции $\Phi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, как доказано Н. И. Мухелишвили⁴, из граничных условий вытекающие из соотношений:

$$\sigma_\eta + i\tau_{\xi\eta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{[\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)]}{\omega'(\zeta)};$$

² Жумабаев Б., Баялиева Ж. А., Исмаилова К. Д. Напряженное состояние у оснований дорог, расположенных в склоне гор // Современные проблемы механики сплошных сред: сб. тр. междунар. конф. – 2011. – Вып. 13. – С.300–309.

³ Жумабаев Б., Баялиева Ж. А. Напряженное состояние склона с уступами от действия распределенной на уступах нагрузки // Вестник КазНИТУ. Алматы: Казахский нац. техн. ун-т им. К. И. Сатпаева, 2014. С.142–159.

⁴ Баялиева Ж. А., Жумабаев Б. Ж. Напряженное состояние склона горы с уступом при действии внешней нагрузки с линейно-возрастающей треугольной эпюрой // Известия Тульского государственного университета. – 2021. – Вып. 1. – С. 111–122; Жумабаев Б., Баялиева Ж. А. Напряженное состояние склона с уступами от действия распределенной на уступах нагрузки // Вестник КазНИТУ. Алматы: Казахский нац. техн. ун-т им. К. И. Сатпаева, 2014. С.142–159.

$$\sigma_{\eta} - i\tau_{\xi\eta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\left[\omega'(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)} \right]}{\omega'(\zeta)} \quad (4)$$

при $\zeta = \xi = t, \eta = 0$ и $\sigma_{\eta}(\xi, 0) = N(\xi), \tau_{\xi\eta}(\xi, 0) = T(\xi)$.

Величины $T(\xi)$ и $N(\xi)$ нормальные и касательные на контуре исследуемой области нагрузки. Начальное напряженное состояние массива горы с симметричным уступом в естественных условиях формируется при совместном действии гравитационных, горизонтальных тектонических сил и внешних распределенных нагрузок с треугольной эпюрой (см. рис. 1). Требуется найти законы распределения напряжений, если в каждой точке массива выполняются дифференциальные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x^{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{\eta}}{\partial y} + \rho_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}^{\eta}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{\eta}}{\partial y} + \rho_y = 0, \quad (5)$$

где $\rho_x = 0$, – горизонтальные и вертикальные $\rho_y = \gamma = \rho * g$ составляющие объемной силы; интегралы от (5) имеют вид

$$\sigma_x^{\eta} = A_1 * y + T_x; \quad \sigma_y^{\eta} = A_2 y, \quad (6)$$

где приняты обозначения $A_1 = \lambda \gamma$;

$$A_2 = \gamma;$$

λ – коэффициент бокового распора по Диннику⁵;

тектоническая сила T_x направлена горизонтально [4];

y – расстояние по вертикали рассматриваемой точки массива. При отсутствии внешних нагрузок на контурных точках компоненты напряжений будут равны

$$\sigma_{\eta}(\xi, 0) = 0, \tau_{\xi\eta}(\xi, 0) = 0. \quad (7)$$

Результаты исследований. Определение напряжений от действия внешней нагрузки, когда закон распределения имеет вид (см. рис. 1)

$$N(\xi) = \frac{L_4 - \xi}{L_4 - L_3} * p_0; \quad (L_3 \leq \xi \leq L_4). \quad (8)$$

Учитывая в (8), где на участках контура нагрузка $N(\xi) = 0$. Тогда воспользуемся вытекающими (4) граничными условиями равенствами [10; 13];

$$\Phi(t) \cdot \overline{\omega'(t)} + \overline{\Phi(t)} \cdot \omega'(t) + \overline{\omega(t)}\Phi'(t) + \omega'(t)\Psi(t) = \overline{\omega'(t)}[N(t) + iT(t)];$$

$$\Phi(t) \cdot \omega'(t) + \overline{\Phi(t)} \cdot \overline{\omega'(t)} + \overline{\omega'(t)}\Phi'(t) + \omega'(t)\Psi(t) = \omega'(t)[N(t) - iT(t)]. \quad (9)$$

Интегралы типа Коши [12; 14], взятые в пределах от «-» бесконечности до «+» бесконечности от граничных условий (9), имеют следующий вид:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{(B(\xi, \eta) - G(\xi, \eta))}{\omega p_1(\xi, \eta)};$$

$$\Phi p_1(\xi, \eta) = \frac{B p_1(\xi, \eta) - G p_1(\xi, \eta) - \Phi(\xi, \eta) \cdot \omega_0 p_2(\xi, \eta)}{\omega p_1(\xi, \eta)}; \quad (10)$$

$$\omega(\xi, \eta) = \alpha \zeta(\xi, \eta) + \omega_0(\xi, \eta) \quad \omega p_1(\xi, \eta) = \omega_0 p_1(\xi, \eta) + \alpha;$$

$$\omega_0(\xi, \eta) = a_1 / \zeta(\xi, \eta) - i + b_1 / \zeta(\xi, \eta) + tb - i;$$

$$\omega_0 p_1(\xi, \eta) = a_1 / (\zeta(\xi, \eta) - i)^2 - b_1 / (\zeta(\xi, \eta) + tb - i)^2;$$

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{-\overline{K}_1}{(\zeta(\xi, \eta) - i)^2} + \frac{-\overline{K}_2}{(\zeta(\xi, \eta) + tb - i)^2};$$

$$G_1 p_1(\xi, \eta) = \frac{2\overline{K}_1}{(\zeta(\xi, \eta) - i)^3} + \frac{2\overline{K}_2}{(\zeta(\xi, \eta) + tb - i)^3};$$

$$K_1 = a_1 \Phi_0 \quad K_2 = \overline{b_1} \Phi_0 tb \quad \Phi_0 = \wedge_{0,0} \quad \Phi_0 tb = \wedge_{1,0}$$

$$BN(\xi, \eta) = BBn(\xi, \eta)(L_4 - \zeta(\xi, \eta));$$

$$BBn(\xi, \eta) = Nc2\omega p_1(\xi, \eta) \cdot \ln \left(\frac{L_3 - \zeta(\xi, \eta)}{L_4 - \zeta(\xi, \eta)} \right) -$$

$$-bd_1 L(\xi, \eta) + bd_2 L(\xi, \eta);$$

$$BN_1(\xi, \eta) = -BBn(\xi, \eta) + (L_4 - \zeta(\xi, \eta)) \cdot Bn_1(\xi, \eta)$$

$$Bn_1(\xi, \eta) = Nc_2 \cdot (\omega p_2(\xi, \eta) \cdot u_{21}(\xi, \eta) +$$

$$+ bd_{11} L(\xi, \eta) + bd_{21}(\xi, \eta));$$

$$u_2(\xi, \eta) = \ln \left(\frac{L_3 - \zeta(\xi, \eta)}{L_4 - \zeta(\xi, \eta)} \right)$$

$$u_{21}(\xi, \eta) = \frac{-1}{L_3 - \zeta(\xi, \eta)} + \frac{1}{L_4 - \zeta(\xi, \eta)};$$

$$AN_1(\xi, \eta) = An_1(\xi, \eta) \cdot (L_4 - \zeta(\xi, \eta));$$

$$An_1(\xi, \eta) = Nc2\omega p_1 c L(\xi, \eta) \cdot \ln \left(\frac{L_3 - \zeta(\xi, \eta)}{L_4 - \zeta(\xi, \eta)} \right) +$$

$$+ bd_1 c L(\xi, \eta) + bd_2 c L(\xi, \eta).$$

⁵ Жумабаев Б., Баялиева Ж. А. Методика моделирования и аналитическое описание напряженно-деформированного состояния массивов склона горы с уступами // Вестник Забайкальского государственного университета. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 4–16.

Постоянные интегрирования, как и в работе [2], обозначены через:

$$Nc_2 = \frac{P_0}{2\pi i(L_4 - L_3)}; \quad In_{12}L = \ln\left(\frac{L_3 - i}{L_4 - i}\right);$$

$$In_{11}L = \frac{-1}{L_3 - i} + \frac{1}{L_4 - i};$$

$$Jn_{12}L = \ln\left(\frac{L_3 + i}{L_4 + i}\right); \quad Jn_{11}L = \frac{-1}{L_3 + i} + \frac{1}{L_4 + i};$$

$$In_{22}L = \ln\left(\frac{L_3 + tb - i}{L_4 + tb - i}\right);$$

$$In_{21}L = \frac{-1}{L_3 + tb - i} + \frac{1}{L_4 + tb - i};$$

$$Jn_{13}L = \left[\frac{-1}{(L_3 + i)^2} + \frac{1}{(L_4 + i)^2} \right] \cdot 0.5$$

$$Jn_{22}L = \ln\left(\frac{L_3 + tb - i}{L_4 + tb - i}\right);$$

$$Jn_{21}L = \frac{-1}{L_3 + tb - i} + \frac{1}{L_4 + tb - i};$$

$$Jn_{23}L = \left[\frac{-1}{(L_3 + tb - i)^2} + \frac{1}{(L_4 + tb - i)^2} \right] \cdot 0.5.$$

Для определения постоянных величин K1 и K2 в первом уравнении (10), последовательно представим, что $\zeta_1 = i$ и $\zeta_2 = -tb - i$. В результате будем иметь систему двух линейных уравнений с комплексными коэффициентами. Добавим к ним сопряженные еще двух уравнений. Полученная система четырех линейных уравнений с коэффициентами $M_{к,м}$ в левой и $M_{0к}$ в правой частях имеет вид:

$$M_{0,0} = \omega p_1(0, -1); \quad M_{0,1} = 0;$$

$$M_{0,2} = n_1(0, -1); \quad M_{0,3} = nb(0, -1);$$

$$M_{1,0} = 0; \quad M_{1,1} = \omega p_1(-tb, -1);$$

$$M_{1,2} = n_1(-tb, -1); \quad M_{1,3} = nb(-tb, -1);$$

$$M_{2,0} = \overline{M_{0,2}}; \quad M_{2,1} = \overline{M_{0,3}}; \quad M_{2,2} = \overline{M_{0,0}};$$

$$M_{2,3} = \overline{M_{0,1}}; \quad M_{3,0} = \overline{M_{1,2}}; \quad M_{3,1} = \overline{M_{1,3}};$$

$$M_{3,2} = \overline{M_{1,0}}; \quad M_{3,3} = \overline{M_{1,1}}.$$

Правая часть системы является:

$$M_{0,0} = B(0, -1); \quad M_{0,1} = B(-tb, -1);$$

$$M_{0,2} = \overline{B(0, -1)}; \quad M_{0,3} = \overline{B(-tb, -1)}.$$

Для коэффициентов системы обозначим через:

$$n_1(\xi, \eta) = \frac{-a_1}{((\zeta(\xi, \eta) - i))^2};$$

$$nb(\xi, \eta) = \frac{-b_1}{(\zeta(\xi, \eta) + tb - i)^2}.$$

Искомые из граничных условий (9) функции тогда имеют вид:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{(B(\xi, \eta) - G(\xi, \eta))}{\omega p_1(\xi, \eta)};$$

$$\Phi p_1(\xi, \eta) = \frac{B p_1(\xi, \eta) - G p_1(\xi, \eta) - \Phi(\xi, \eta) \cdot \omega_0 p_2(\xi, \eta)}{\omega p_1(\xi, \eta)};$$

$$\text{где } G(\xi, \eta) = n_1(\xi, \eta) \overline{\Phi_0} + nb(\xi, \eta) \overline{\Phi_0} tb;$$

$$G p_1(\xi, \eta) = n_1 p_1(\xi, \eta) \overline{\Phi_0} + nb p_1(\xi, \eta) \overline{\Phi_0} tb; \quad (11)$$

$$n_1 p_1(\xi, \eta) = \frac{2a_1}{(\zeta(\xi, \eta) - i)^3};$$

$$nb p_1(\xi, \eta) = \frac{2b_1}{(\zeta(\xi, \eta) + tb - i)^3};$$

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{-\overline{K_1}}{(\zeta(\xi, \eta) - i)^2} + \frac{-\overline{K_2}}{(\zeta(\xi, \eta) + tb - i)^2};$$

$$G_1 p_1(\xi, \eta) = \frac{2\overline{K_1}}{(\zeta(\xi, \eta) - i)^3} + \frac{2\overline{K_2}}{(\zeta(\xi, \eta) + tb - i)^3};$$

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{D_3(\xi, \eta) + D\Psi_3(\xi, \eta)}{\omega p_1(\xi, \eta)}. \quad (12)$$

Соотношения (12) из-за наличия полюсов в окрестности $\zeta_{1=i}$ и $\zeta_2 = -tb - i$ вычислены альтернативными соотношениями, как в работе⁶.

Для проверки граничных условий с нагрузкой убывающей треугольной эпюрой (см. рис. 1) выполнен расчет напряжений для контурных точек в окрестности нагруженного участка контура, результаты представлены в табл. 1.

⁶ Жумабаев Б., Ж.А. Баялиева. Напряженное состояние склона с уступами от действия распределенной на уступах нагрузки // Вестник КазНУ. – Алматы: Казахский нац. техн. ун-т им. К. И. Сатпаева, 2014. – С.142–159; Жумабаев Б. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом. – Фрунзе: Илим, 1988. – 190 с.

Таблица 1/ Table 1

Расчет напряжений с нагрузкой /Calculation of stresses with load

№ п/п	«x(ξ,0)», м	«y(ξ,0)», м	«σ η(ξ, -0)», МПа	«τ ξ η (ξ, -0)», МПа
1	379,1	378,5	-1,6*10 ⁻¹²	1,2*10 ⁻¹²
2	386,5	377,4	-47,6	-7,2*10 ⁻¹⁵
3	394,4	376,7	-45,1	2,2*10 ⁻¹⁴
4	402,9	376,4	-42,5	8,3*10 ⁻¹⁵
5	412,1	376,4	-39,9	-1,2*10 ⁻¹⁴
6	422	376,6	-37,4	0
7	432,7	376,8	-34,8	5,5*10 ⁻¹⁵
8	444,1	377	-32,3	-1*10 ⁻¹⁴
9	456,2	377	-29,7	-1,3*10 ⁻¹⁴
10	469	376,7	-24,6	11*10 ⁻¹⁵
11	482,5	375,9	-22,1	-6*10 ⁻¹⁵
12	496,5	374,5	-19,5	2,9*10 ⁻¹⁴
13	525,9	369,7	-14,4	-1*10 ⁻¹⁴

Из табл. 1 видно, что в столбцах для компонентов напряжений, которые перпендикулярны контурным точкам массива склона горы, числовые значения убывают линейно и дублируют закон изменения эпюры внешней нагрузки

(см. рис. 1), где касательная компонента во всех точках контура равна нулю. Выполнен расчёт компонентов напряжений и получены закономерности распределения напряжений, которые представлены в виде изолиний на (рис. 2).

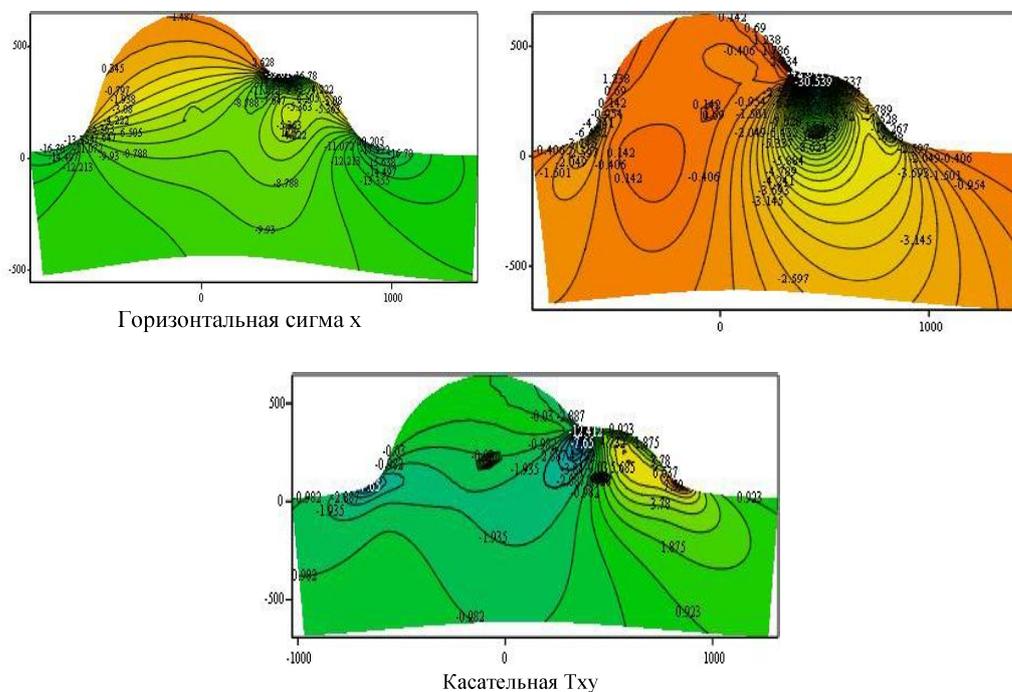


Рис. 2. Изолинии распределения напряжений / Fig.2. Isolines of stress distribution

На рис. 2 видно, что изолинии напряжений указывают на влияние выступа склона горы, где закон распределения внешней нагрузки приводит к весьма сложному закону распределения напряжений, которые сложно прогнозировать без выполнения расчетов с конкретными параметрами склона горы с выступом в местах приложения внешней нагрузки.

Начальное напряженное состояние склона горы уступом. Начальное напряженное состояние массива склона горы уступом, испытывающее действие силы гравитации и тектонического сжатия (без внешних нагрузок), удовлетворяет уравнениям равновесия (5) и граничным условиям (7) во всех точках горного массива⁷. Чтобы выполнялось условие (7), во всех точках контура массива необходимо прикладывать фиктивные нагрузки N и T, которые возникают от полей напряжений (6). Фиктивные нагрузки вычисляются соотношениями:

$$N + iT = \frac{\sigma_x^n + \sigma_y^n}{2} + \frac{\sigma_y^n - \sigma_x^n}{2} * e^{2i\alpha};$$

$$N - iT = \frac{\sigma_x^n + \sigma_y^n}{2} + \frac{\sigma_y^n - \sigma_x^n}{2} * e^{-2i\alpha} . \tag{13}$$

Для контурных точек $e^{2i\alpha} = \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)}$;

$$e^{-2i\alpha} = \frac{\overline{\omega'(\xi)}}{\omega'(\xi)}; \quad y = (\omega(\xi) - \overline{\omega(\xi)}) / (2 * i)$$

вводим обозначения: $T_1 = T_x / 2$; $T_2 = \alpha * i * A_2 / 2$;
 $T_3 = i * (A_1 + A_2) / 4$; $T_4 = -i * (A_1 - A_2) / 4$.

Тогда для правой части граничной задачи (9) имеет место явно заданный закон распределенных фиктивных нагрузок:

$$F_1(\xi) = T_1(\omega'(\xi) - \overline{\omega'(\xi)}) + (T_2 + T_3 * \overline{\omega'(\xi)} + T_4 * \omega'(\xi)) * (\omega_0(\xi) - \overline{\omega_0(\xi)});$$

$$F_2(\xi) = -T_1(\omega'(\xi) - \overline{\omega'(\xi)}) + (T_2 + T_3 * \omega'(\xi) + T_4 * \overline{\omega'(\xi)}) * (\omega_0(\xi) - \overline{\omega_0(\xi)}). \tag{14}$$

Интегралы типа Коши от условий (14) имеют вид:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{(B(\xi, \eta) - G(\xi, \eta))}{\omega p_1(\xi, \eta)} .$$

$$\Psi p_1(\xi, \eta) = \frac{B p_1(\xi, \eta) - G p_1(\xi, \eta) - \Phi(\xi, \eta) \cdot \omega_0 p_2(\xi, \eta)}{\omega p_1(\xi, \eta)} \tag{15}$$

Соотношения для $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ будут определены из функций (11) и (12), если заменим $AN(\zeta)$ на $A(\zeta)$ и $BN(\zeta)$ на $B(\zeta)$. Расчеты начального напряженного состояния массива склона горы с уступом выполнены по принятой схеме, сначала для контурных точек массива, где должны быть выполнены граничные условия (7), а затем – для всего массива склона горы уступом. Значения контурных компонентов напряжений внесены в табл. 2.

Данные в четвертом, пятом, шестом и седьмом столбцах указывают, что граничные условия (7) выполняются весьма точно, где погрешность не более чем 10^{-13} . Закономерности распределения начального напряженного состояния массива склона с одним уступом представлены на рис. 3 и табл. 2 для каждого компонента напряжений в виде изолиний напряжений.

Таблица 2/ Table 2

Значения контурных компонентов напряжений / Values of contour stress components

#	«ξ», м	«х», м	«у», м	«σ ₁ », МПа	«σ ₂ », МПа	«N», МПа	«T», МПа	«Tmax», МПа
1	-5	-899,7	27,9	2,1*10 ⁻¹⁴	-122	8,4*10 ⁻¹⁵	4,4*10 ⁻¹⁴	-118,7
2	-4	-780,8	41,7	1,4*10 ⁻¹⁴	-207,6	1,4*10 ⁻¹⁴	4,3*10 ⁻¹⁴	-186,1
3	-3	-676,8	69,1	2,8*10 ⁻¹⁴	-418,2	2,8*10 ⁻¹⁴	2,8*10 ⁻¹⁴	-204,2
4	-2	-596,9	133,7	5,7*10 ⁻¹⁴	-540,6	2,8*10 ⁻¹⁴	7,1*10 ⁻¹⁴	-92,9
5	-1	-522,1	322,9	0	-156,7	7,1*10 ⁻¹⁵	0	-77
6	0	-95,6	644,5	5,7*10 ⁻¹⁴	-59	5,4*10 ⁻¹⁴	-4*10 ⁻¹⁵	-58,5
7	1	326,2	407,6	8,5*10 ⁻¹⁴	-208,8	8,5*10 ⁻¹⁴	4,2*10 ⁻¹⁴	-24,8
8	2	503,3	364,5	2,1*10 ⁻¹⁴	-69,4	2,5*10 ⁻¹⁴	2,2*10 ⁻¹⁴	-67,7
9	3	753,4	205,1	2,8*10 ⁻¹⁴	-142,5	3,6*10 ⁻¹⁴	1,8*10 ⁻¹⁴	-16,8
10	4	845,8	91,8	8,5*10 ⁻¹⁴	-349,1	8,5*10 ⁻¹⁴	-5*10 ⁻¹⁴	-33,2
11	5	943,5	50,8	7,1*10 ⁻¹⁴	-216,2	8,2*10 ⁻¹⁴	7,1*10 ⁻¹⁵	-170,9

⁷ Баялиева Ж. А., Жумабаев Б. Ж. Напряженное состояние склона горы с уступом при действии внешней нагрузки с линейно-возрастающей треугольной эпюрой // Известия Тульского государственного университета. – 2021. – Вып. 1. – С.111–122; Жумабаев Б. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом. – Фрунзе: Илим, 1988. – 190 с.

Окончание табл. 2

12	6	$1,1 \cdot 10^3$	32	$2,1 \cdot 10^{-14}$	-125,1	$2,4 \cdot 10^{-14}$	$1,8 \cdot 10^{-14}$	-119,5
13	7	$1,2 \cdot 10^3$	22,2	$1,4 \cdot 10^{-14}$	-83,1	$1,6 \cdot 10^{-14}$	$1,6 \cdot 10^{-14}$	-82
14	8	$1,3 \cdot 10^3$	16,3	$7,1 \cdot 10^{-15}$	-60,9	$8,6 \cdot 10^{-15}$	$4,4 \cdot 10^{-15}$	-60,6
15	9	$1,5 \cdot 10^3$	12,5	$1,4 \cdot 10^{-14}$	-47,7	$1,7 \cdot 10^{-14}$	$2,3 \cdot 10^{-14}$	-47,6
16	10	$1,6 \cdot 10^3$	9,9	0	-39,2	$3,5 \cdot 10^{-15}$	$10 \cdot 10^{-15}$	-39,1
17	11	$1,7 \cdot 10^3$	8,1	$3,6 \cdot 10^{-15}$	-33,3	$2,3 \cdot 10^{-15}$	$1,6 \cdot 10^{-14}$	-33,3
18	12	$1,9 \cdot 10^3$	6,7	$3,6 \cdot 10^{-15}$	-29,1	$4,4 \cdot 10^{-15}$	$9,1 \cdot 10^{-15}$	-29,1
19	13	$2 \cdot 10^3$	5,6	$1,8 \cdot 10^{-15}$	-25,9	0	$4,7 \cdot 10^{-15}$	-25,9
20	14	$2,2 \cdot 10^3$	4,8	$1,8 \cdot 10^{-15}$	-23,5	$1,7 \cdot 10^{-15}$	$3,3 \cdot 10^{-15}$	-23,5
21	15	$2,3 \cdot 10^3$	4,2	$1,8 \cdot 10^{-15}$	-21,6	$3,8 \cdot 10^{-15}$	$1,5 \cdot 10^{-14}$	-21,6
22	16	$2,5 \cdot 10^3$	3,6	$1,8 \cdot 10^{-15}$	-20,1	0	$7,5 \cdot 10^{-15}$	-20,1
23	17	$2,6 \cdot 10^3$	3,2	$3,6 \cdot 10^{-15}$	-18,9	$1,6 \cdot 10^{-15}$	$1,5 \cdot 10^{-14}$	-18,9
24	18	$2,7 \cdot 10^3$	2,8	0	-17,8	0	$1,3 \cdot 10^{-14}$	-17,8
25	19	$2,9 \cdot 10^3$	2,5	0	-17	0	$1,2 \cdot 10^{-15}$	-17

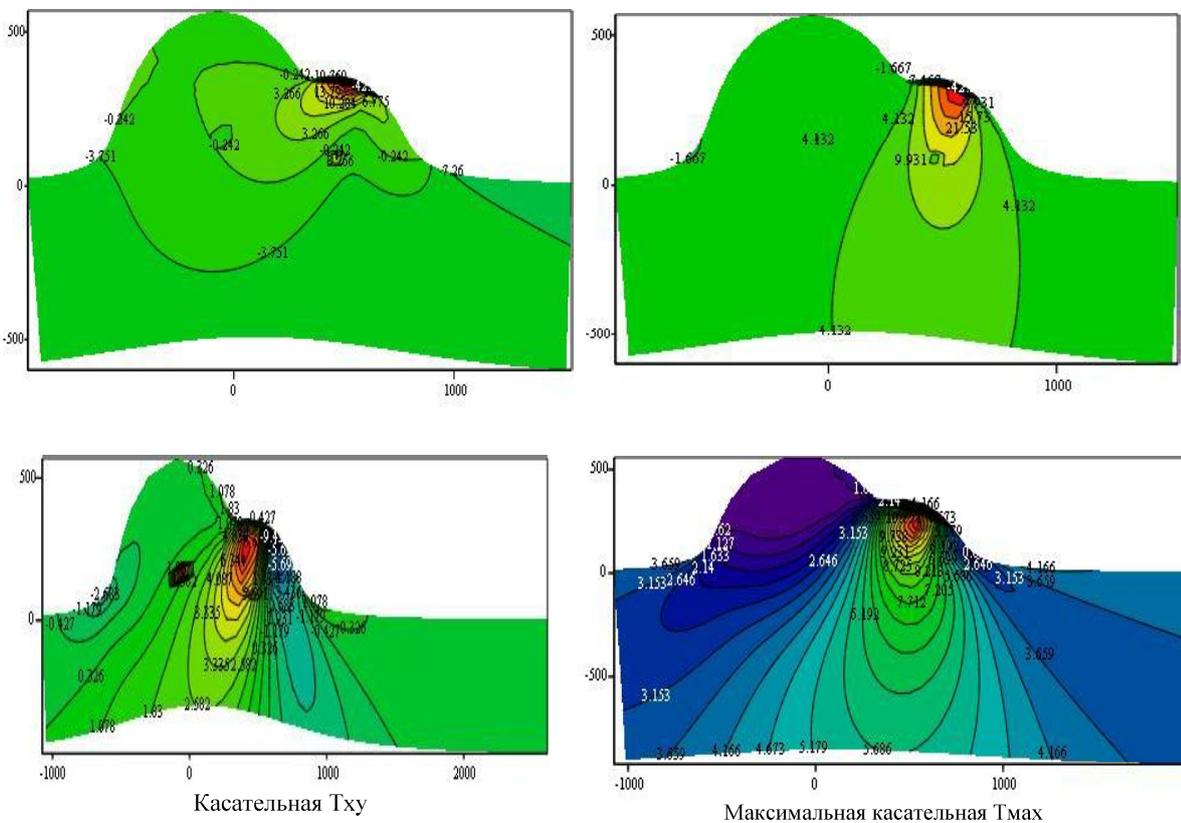


Рис. 3. Распределения напряжений от действия гравитационных сил / Fig.3. Stress distributions from the action of gravitational forces

Выводы. 1. Напряженное состояние склона горы с уступом при действии гравитационных, горизонтальных тектонических сил и распределенной внешней нагрузки с убывающей треугольной эпюрой описаны аналитическим методом.

2. Установлены закономерности распределения напряжений в массивах склона горы с уступом от совместного действия внешней на-

грузки с убывающей треугольной эпюрой, гравитационных, горизонтальных тектонических сил.

3. Суммарное напряженное состояние склона горы с уступом от всех перечисленных сил определяется суммированием соотношений $BN(\zeta) + B(\zeta)$, $AN(\zeta) + A(\zeta)$ и выполнением расчетов для функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$.

4. Для расчёта напряжений использована компьютерная система программы MATCAD [11].

Список литературы

1. Айтматов И. Т. Геомеханика рудных месторождений Средней Азии. Фрунзе: Илим, 1984. 246 с.
2. Гольдштейн Р. В., Калинин Э. В. Опыт применения аналитического метода для оценки напряженного состояния массива горных пород в бортах и основании глубоких речных долин // Вестник Московского университета. 1969. № 5. С. 54–65.
3. Динник А. Н. Распределение напряжений вокруг подземных выработок // Труды совещания по управлению горным давлением. М.: АН СССР, 1938. С. 7–55.
4. Крупенников Г. А., Филатов Н. А., Амусин Б. З., Барковский В. М. Распределение напряжений в породных массивах. М.: Недра, 1972. 144 с.
5. Ким Э. В. Комплексная оценка устойчивости откосов дорог в рыхлых отложениях горных территорий Кыргызстана: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Бишкек, 2003. 21 с.
6. Кирьянов Д. MATHCAD № 14 в подлиннике. СПб.: БВХ-Петербург, 2007. 704 с.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. Тер-Мартirosян З.Г., Ахпателов Д.М. Напряженное состояние горных массивов в поле гравитации // ДАН СССР. 1976. Т. 2, № 2. С. 311–314.

References

1. Aytmatov I. T. *Geomehanika rudnyh mestorozhdeniy Sredney Azii*. (Geomechanics of ore deposits in Central Asia). Frunze: Ilin, 1984. 246 p.
2. Goldshteyn R. V., Kalinin E. V. *Vestnik Moskovskogo universiteta* (Bulletin of the Moscow State University), 1969, no. 5, pp. 54–65.
3. Dinnik A. N. *Trudy soveschaniya po upravleniyu gornym davleniyam* (Proceedings of the meeting on the management of rock pressure). Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1938. Pp. 7–55 p.
4. Krupennikov G. A., Filatov N. A., Amusin B. Z., Barkovsky V. M. *Raspredeleniye napryazheniy v porodnyh massivah* (Stress distribution in rock massifs). Moscow: Nedra, 1972. 144 p.
5. Kim E. V. *Kompleksnaya ocenka ustoychivosti otkosov dorog v ryhlyh otlozheniyah gornyh territoriy Kyrgyzstana* (A comprehensive assessment of the stability of the slopes of roads in loose deposits of the mountainous territories of Kyrgyzstan). Bishkek, 2003. 21 p.
6. Kiriyanov D. V. *MATHCAD no. 14 v podlinnike* (MATHCAD No. 14 in the original). St. Petersburg: BVK-Petersburg, 2007. 704 p.
7. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* (Some basic problems of the mathematical theory of elasticity). Moscow: Nauka, 1966. 707 p.
8. Ter-Martirosyan Z. G., Akhpatelov D. M. *DAN USSR* (DAN USSR), 1976. Vol. 2, no. 2. Pp. 311–314.

Информация об авторе

Баялиева Жамиля Аскаровна, канд. техн. наук, доцент кафедры гидротехнического строительства, Кыргызский национальный аграрный университет им. К. И. Скрябина, г. Бишкек, Кыргызстан. Область научных интересов: науки о Земле, горные науки
ms.jamila62@mail.ru

Жумабаев Бейшенбек, д-р техн. наук, профессор кафедры механики, Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Ельцина, г. Бишкек, Кыргызстан. Область научных интересов: науки о Земле, горные науки
ms.jamila62@mail.ru

Information about the author

Zhamila Baialieva, candidate of technical sciences, associate professor, Mountain of Hydraulic Engineering department, Kyrgyz National Agrarian University named after K.I. Skryabin, Bishkek, Kyrgyzstan, City, Mederov str. Scientific interests: Earth science, mountain science

Beyshebenek Zhumabaev, doctor of technical sciences, professor, Mechanics department, Kyrgyz-Russian Slavic University named after Boris Yeltsin. Bishkek Kyrgyzstan. Scientific interests: Earth science, mountain science

Для цитирования

Баялиева Ж. А., Жумабаев Б. Изменение напряженного состояния склона горы с уступом под действием внешней нагрузки с убывающей треугольной эпюрой // Вестник Забайкальского государственного университета. 2022. Т. 28, № 9. С. 6–15. DOI: 10.21209/2227-9245-2022-28-9-6-15.

Baialieva Zh., Zhumabaev B. Changes in the stress state of a mountain slope with a ledge under the action of an external load with a decreasing triangular epure // Transbaikal State University Journal, 2022, vol. 28, no. 9. pp. 6–15. DOI: 10.21209/2227-9245-2022-28-9-6-15.

Статья поступила в редакцию: 29.09.2022 г.

Статья принята к публикации: 01.11.2022 г.